等質空間の部分多様体のPoincareの公式 (リーマン部分多様体の総合的研究)

田崎, 博之

数理解析研究所講究録 1292 巻 2002 年 94-105

等質空間の部分多様体の Poincaré の公式

筑波大学 数学系　田崎博之 (Hiroyuki Tasaki)
Institute of Mathematics,
University of Tsukuba

Riemann 等質空間 G/K の部分多様体 M と N に対して、$\dim M+\dim N\geq\dim(G/K)$ のとき、G 上の関数 $g\mapsto\mathrm{vol}(M\cap gN)$ の積分

$$\int_{G}\mathrm{vol}(M\cap gN)d\mu(g)$$

を M と N の幾何学的量で表現する等式を Poincaré の公式と呼ぶ。この公式は 19 世紀末に G/K が平面であり M と N が曲線の場合に発見され、以後、適用範囲は球面、実空間形、複素空間形とその複素部分多様体へと拡がり、現在では一般の Riemann 等質空間にまで一般化されている。実空間形における Poincaré の公式は種々の変分問題に応用され成功をおさめているが ([13] 参照)、Howard [2] による一般の Riemann 等質空間における Poincaré の公式の定式化は、記述が具体的ではないため変分問題への応用までには到っていない。そこで Howard の定式化した Poincaré の公式をより具体的に記述することを問題にした。ここでは、複素空間形とその他のいくつかの Riemann 等質空間における Poincaré の公式の具体的な記述について解説する。

1. Howard の定式化

まず、Howard の定式化した Riemann 等質空間内の部分多様体に関する Poincaré の公式ついて簡単に説明する。

E を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を持つ有限次元実ベクトル空間とする。E の内積は E 上の k 次外積代数 $\wedge_k E$ 上の内積を自然に誘導する。このとき、$e_1,\dots,e_n$ を E の正規直交基底とすると、

$$\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}\mid 1\leq i_1<\cdots<i_k\leq k\}$$

は $\wedge_k E$ の誘導された内積に関して正規直交基底になる。

Riemann 等質空間 G/K の点 x と y における接ベクトル空間の部分ベクトル空間 $V\subset T_x(G/K)$ と $W\subset T_y(G/K)$ に対して角度を一般化した量 $\sigma_K(V,W)$ を次のように定める。V の正規直交基底 $v_1,\dots,v_p$ と W の正規直交基底 $w_1,\dots,w_q$ をとり、$g_x o=x,\ g_y o=y$ を満たす G の元 g_x,g_y をとる。これらを使って、

$$\sigma_K(V,W)=\int_K\|dg_x^{-1}(v_1\wedge\cdots\wedge v_p)\wedge dk^{-1}dg_y^{-1}(w_1\wedge\cdots\wedge w_q)\|d\mu(k)$$

によって $\sigma_K(V,W)$ を定める。被積分関数のノルムは、接ベクトル空間 $T_o(G/K)$ の内積から自然に定まる外積代数の内積に関するノルムである。ノルムがあるた

め被積分関数は V の正規直交基底 $v_1, \ldots, v_p$ と W の正規直交基底 $w_1, \ldots, w_q$ のとり方に依存しない。さらに K 上で積分しているため、$\sigma_K(V, W)$ は g_x, g_y のとり方にも依存しない、すなわち、V と W にのみ依存して定まる。これを使って Howard による Poincaré の公式の定式化を与えることができる。

定理 1.1 (Howard[2]) Riemann 等質空間 G/K の Lie 群 G はユニモジュラーであると仮定する。G/K の部分多様体 M と N が $\dim M + \dim N \geq \dim(G/K)$ を満たしていると仮定する。このとき、次の等式が成り立つ。

$$\int_G \mathrm{vol}(M \cap gN) d\mu(g) = \int_{M \times N} \sigma_K(T_x^\perp M, T_y^\perp N) d\mu(x, y).$$

σ_K は K の $T_o(G/K)$ への線形イソトロピー表現から定まるので、線形イソトロピー表現が同値になる Riemann 等質空間においては同じ形の Poincaré の公式が成り立つ。このことを Howard は**転送原理**と呼んでいる。

σ_K はその定め方から G の作用に関して不変になる。したがって、σ_K の値を調べるには原点 o における接ベクトル空間 $T_o(G/K)$ の部分ベクトル空間に対して考えれば十分である。σ_K を $T_o(G/K)$ の二つの部分ベクトル空間の組に対する関数とみなすと、σ_K は K の作用に関して不変になる。このことを使って Howard は σ_K が一定になる例をいくつか示している。たとえば、G/K が実空間形の場合、K は $T_o(G/K)$ 内の同じ次元の部分ベクトル空間全体に推移的に作用するため、σ_K は一定値をとる。よって Poincaré の公式の右辺は二つの部分多様体の体積の積の普遍定数倍になる。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 1.2 G/K を n 次元実空間形とする。G/K の p 次元部分多様体 M と q 次元部分多様体 N が $p + q \geq n$ を満たすとき、次の等式が成り立つ。

$$\int_G \mathrm{vol}(M \cap gN) d\mu(g) = \frac{\mathrm{vol}(S^{p+q-n})\mathrm{vol}(G)}{\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^q)} \mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N).$$

また G/K が複素空間形の場合、K は $T_o(G/K)$ 内の同じ次元の複素部分ベクトル空間全体に推移的に作用するため、σ_K は複素部分ベクトル空間に対して一定値をとる。よって複素部分多様体に対する Poincaré の公式の右辺は二つの複素部分多様体の体積の積の普遍定数倍になる。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 1.3 G/K を n 次元複素空間形とする。G/K の p 次元複素部分多様体 M と q 次元複素部分多様体 N が $p + q \geq n$ を満たすとき、次の等式が成り立つ。

$$\int_G \mathrm{vol}(M \cap gN) d\mu(g) = \frac{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^{p+q-n})\mathrm{vol}(G)}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^p)\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^q)} \mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N).$$

M と N がホモロジー類を代表する場合は、$\mathrm{vol}(M \cap gN)$ は M と N のホモロジー不変量になるが、一般の場合には $\mathrm{vol}(M \cap gN)$ は g に依存して変化する。この複素空間形における複素部分多様体に関する Poincaré の公式は、最初 Santaló[9] によって示され、Howard[2] によって再定式化された。さらにこの Poincaré の公式は複素空間形以外にも拡張されている。これについては定理 4.2 で述べる。

$T_o(G/K)$ の部分ベクトル空間の集合への K の作用の推移性が成り立たない場合には、K の $T_o(G/K)$ への線形イソトロピー作用が誘導する $T_o(G/K)$ 内の k 次元部分ベクトル空間全体のなす実 Grassmann 多様体 $G_k(T_o(G/K))$ への作用を詳しく調べ、それを元にして σ_K を具体的に記述する必要がある。そこで、Poincaré の公式を具体的に記述するという問題を次の二つの問題に分割して考える。

(1) K の $G_k(T_o(G/K))$ への作用の不変量を定める。

(2) σ_K を (1) で求めた不変量で表現する。

複素空間形の場合に (1) は多重 Kähler 角度を導入することで解決したが、(2) は現在進行中である。実空間形と複素空間形以外の Riemann 等質空間の場合には、この問題に対してはまだ若干の結果が得られているに過ぎない。これらの結果についての解説を行なう。

2. Kähler 角度

定理 1.3 では複素空間形内の複素部分多様体に関する Poincaré の公式を示したが、この節では一般の実部分多様体に関する Poincaré の公式について考える。実 2 次元部分多様体には Kähler 角度と呼ばれる不変量があり、Kähler 角度を使って複素空間形内の実 2 次元部分多様体と実余 2 次元部分多様体に関する Poincaré の公式を示す。そこでまず Kähler 角度の定義とその基本的性質について述べる。

$\mathbf{C}^n$ を n 次元複素ベクトル空間とし、その標準的な実内積と Kähler 形式を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と ω で表す。すなわち、

$$\omega(u, v) = \langle \sqrt{-1}u, v \rangle \qquad (u, v \in \mathbf{C}^n).$$

$\mathbf{C}^n$ 内の実 2 次元部分ベクトル空間 V に対してその正規直交基底 v_1, v_2 をとり、$\theta(V) = \cos^{-1} |\omega(v_1, v_2)|$ によって V の Kähler 角度 $\theta(V)$ を定める。ここでは部分ベクトル空間や部分多様体の向きは考えないので、絶対値 $|\omega(v_1, v_2)|$ をとり Kähler 角度の動く範囲は $[0, \pi/2]$ とする。(向きを考える場合は絶対値をとらず Kähler 角度の動く範囲は $[-\pi/2, \pi/2]$ になる。) Kähler 形式 ω はユニタリ群 $U(n)$ の作用に関して不変になるので、Kähler 角度 $\theta(V)$ もユニタリ群 $U(n)$ の作用に関して不変になる。V の Kähler 角度が 0 になるための必要十分条件は V が複素部分ベクトル空間になることであり、V の Kähler 角度が $\pi/2$ になるための必要十分条件は V と $\sqrt{-1}V$ が直交することである。このように Kähler 角度は実 2 次元部分ベクトル空間が複素部分ベクトル空間とどの程度違うかを計る基本的な不変量である。

複素空間形の部分多様体に関する Poincaré の公式を考える場合、転送原理より複素射影空間の場合を考えれば十分である。複素射影空間 $\mathbf{C}P^n = U(n+1)/U(1)\times U(n)$ の線形イソトロピー表現は $U(1)\times U(n)$ の $\mathbf{C}^n$ への表現

$$(z,A)v = zvA^* \qquad ((z,A)\in U(1)\times U(n),\ v\in \mathbf{C}^n)$$

と同値になる。ここで $\mathbf{C}^n$ の元は横ベクトルとみなしている。$\mathbf{C}^n$ の標準的ユニタリ基底を $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ で表す。

$0\le\theta\le\pi/2$ を満たす θ に対して、$\mathbf{C}^n$ 内の Kähler 角度が θ の実 2 次元部分ベクトル空間全体を G^n_θ で表す。$U(n)$ の作用は実 2 次元部分ベクトル空間の Kähler 角度を不変にするので、$U(n)$ は G^n_θ に作用する。

補題 2.1 (Kang-T.[5]) $U(n)$ の G^n_θ への作用は推移的である。さらに

$$V_\theta = \mathrm{span}_{\mathbf{R}}\{\mathbf{e}_1, \cos\theta\sqrt{-1}\mathbf{e}_1+\sin\theta\mathbf{e}_2\}$$

とおくと $G^n_\theta = U(n)\cdot V_\theta$ が成り立つ。

この補題は Kähler 角度が $\mathbf{C}^n$ 内の実 2 次元部分ベクトル空間の $U(n)$ の作用に関する完全不変量であることを意味している。すなわち、$\mathbf{C}^n$ 内の実 2 次元部分ベクトル空間 V と W に対して、ある $g\in U(n)$ が存在して $W = g\cdot V$ が成り立つことと $\theta(V)=\theta(W)$ が同値になる。

定理 2.2 (T.[11]) n 次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ 内の任意の実 2 次元部分多様体 M と任意の実 $(2n-2)$ 次元部分多様体 N に対して、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\int_{U(n+1)} \#(M\cap gN)d\mu(g)\\
=\ &\frac{\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^{n-1})}\\
&\times\int_{M\times N}\left(\frac{1}{4}(1+\cos^2\theta_x)(1+\cos^2\tau_y)+\frac{n}{4(n-1)}\sin^2\theta_x\sin^2\tau_y\right)d\mu(x,y).
\end{aligned}$$

ここで θ_x は T_xM の Kähler 角度であり τ_y は $T_y^\perp N$ の Kähler 角度である。

この定理の N が複素部分多様体の場合を Knag-T.[5] で示し、$n=2$ の場合を Kang-T.[6] で示した。定理 2.2 を含めてこれらの結果の証明では、σ_K のイソトロピー群上の積分を具体的に計算した。ここでその積分の計算の概略を述べておく。Howard による Poincaré の公式の定式化 (定理 1.1) と補題 2.1 の標準形より、$K=U(1)\times U(n)$, $\mathbf{e}(\theta)=\cos\theta\sqrt{-1}\mathbf{e}_1+\sin\theta\mathbf{e}_2$ とおくと

$$\sigma_K(V_\theta, V_\tau^\perp) = \int_K |\langle \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}(\theta), k\cdot(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}(\tau))\rangle| d\mu(k)$$

を θ, τ を使って具体的に表示できれば、Poincaré の公式の具体的表示が得られる。$K = U(1) \times U(n)$ の $\mathbf{C}^n$ への作用は忠実ではないので、K 上の積分は $U(n)$ 上の積分の定数倍になる。$U(n)$ 上の積分を計算するために、コンパクト対称対 $(U(n), U(2) \times U(n-2))$ を利用する。

$$\mathfrak{u}(n) = (\mathfrak{u}(2) + \mathfrak{u}(n-2)) + \mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{m} = \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & X \\ -X^* & 0 \end{array} \right] \middle| \, X \in M_{2,n-2}(\mathbf{C}) \right\}$$

はこのコンパクト対称対に対応する Lie 環の標準分解になる。$\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる。$\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系をとり、$\mathfrak{a}$ 内の基本胞体を C で表す。$B = U(2) \times U(n-2)$ とおいて、写像 ρ を

$$\rho : B \times C \times B \to U(n) \; ; (s, a, t) \mapsto s(\exp a)t$$

によって定め、$U(n)$ 上の積分を余面積公式を使って $B \times C \times B$ 上の積分に変換すると

$$\begin{aligned} & \int_{U(n)} |\langle \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}(\theta), k \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}(\tau))k \rangle| d\mu(k) \\ = \;\; & C \int_{B \times C \times B} |\langle \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}(\theta), (s \exp at) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}(\tau)) \rangle| \prod_{\lambda} \sin^{m(\lambda)} \lambda(a) d\mu(s, a, t) \end{aligned}$$

を得る。ここで、λ は正の制限ルート全体を動くものとし、$m(\lambda)$ はルート λ の重複度を表す。また、定数 C はユニタリ群の体積等を使って具体的に表示することができる。積分変数の内で $(s,t) \in B \times B$ に関する積分を先に実行する。$\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^2$ への直交射影を $P : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^2$ で表すと、$B = U(2) \times U(n-2)$ の作用は $\mathbf{C}^2$ を不変にするので、

$$\begin{aligned} & \int_{B \times B} |\langle \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}(\theta), (s \exp at) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}(\tau)) \rangle| d\mu(s, t) \\ = \;\; & \int_{B \times B} |\langle s^{-1} \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}(\theta)), (\exp at) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}(\tau)) \rangle| d\mu(s, t) \\ = \;\; & \int_{B \times B} |\langle s^{-1} \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}(\theta)), P[(\exp at) \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}(\tau))] \rangle| d\mu(s, t). \end{aligned}$$

最後の積分の内で s に関する積分は、$s^{-1} \cdot (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}(\theta))$ が $\mathbf{C}^2$ の二次の外積の中だけを動くことになり、$\mathbf{C}^2$ の二次の外積に値を持つ関数の内積に関する積分に帰着する。すなわち、積分の計算が $n = 2$ の場合に帰着する。この場合、実 4 次元ベクトル空間上の 2 次の外積は自己双対な元と反自己双対な元に分解するので、Kang-T.[6] ではこれを利用して σ_K の積分を計算することができた。この結果を上の積分に適用しもう一つの B 上の積分と C 上の積分を実行することにより定理 2.2 の結果が得られる。概略を述べた以上の積分の計算は随分長いものであり、より一般的な次元の場合にはこの積分の計算の方針はより困難を伴うことになる。この長い積

分の計算の見通しがよくなるような統一的観点がないか現在模索しているところである。

3. 多重 Kähler 角度

複素射影空間内の一般の実部分多様体に関する Poincaré の公式を定式化するために、この節では Kähler 角度の概念を一般化し多重 Kähler 角度を導入する。多重 Kähler 角度は $\mathbf{C}^n$ 内の実部分ベクトル空間の $U(n)$ の作用に関する完全不変量になり、多重 Kähler 角度を使うと複素射影空間内の一般の実部分多様体に対する Poincaré の公式を定式化することができる。

前節と同様に $\mathbf{C}^n$ の標準的 Kähler 形式を ω で表す。

定義 3.1 (T.[10]) $1 < k \le n$ とする。$\mathbf{C}^n$ 内の実 k 次元部分ベクトル空間 V に対して、ω の V への制限 $\omega|_V$ を交代 2 次形式として標準形にする V の双対空間の基底をとる。すなわち、V の双対空間 V^* の正規直交基底 $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ であって次の等式を満たすものをとることができる。

$$\omega|_V = \sum_{i=1}^{[k/2]} \cos\theta_i \alpha^{2i-1} \wedge \alpha^{2i}, \qquad 0 \le \theta_1 \le \cdots \le \theta_{[k/2]} \le \pi/2.$$

$\theta(V) = (\theta_1, \ldots, \theta_{[k/2]})$ とおいてこれを V の**多重 Kähler 角度**と呼ぶ。$n < k \le 2n-1$ のときは、$\mathbf{C}^n$ 内の実 k 次元部分ベクトル空間 V に対して、$\theta(V) = \theta(V^\perp)$ によって V の多重 Kähler 角度を定める。

注意 3.2 上の定義において $n < k \le 2n-1$ の場合にも $\omega|_V$ を標準形にすることはできるが、そのときには最初のいくつかの θ_i が自動的に 0 になってしまい、V の不変量としては不要なものになる。それらを取り除いて多重 Kähler 角度を定義することもできるが、この場合は直交補空間での ω の標準形を考えた方が簡単なので、ここでは V の多重 Kähler 角度を $V^\perp$ の多重 Kähler 角度として定めることにした。

注意 3.3 研究集会での講演後、剣持先生の情報から Salavessa [8] も特別な次元の場合に上で定義した多重 Kähler 角度と同等なものを考察していることを知った。[8] は $2n$ 次元 Einstein-Kähler 多様体内の実 $2n$ 次元部分多様体の多重 Kähler 角度 ([8] では単に Kähler 角度と呼んでいる) の微分を詳しく調べている。

多重 Kähler 角度の定義から直接わかることをいくつか述べておく。

注意 3.4 $k \le n$ とする。$\mathbf{C}^n$ 内の実 k 次元部分ベクトル空間 V に対して以下のことが成り立つ。

(1) ユニタリ群 $U(n)$ の作用は多重 Kähler 角度を保存する。すなわち、$g \in U(n)$ に対して $\theta(gV) = \theta(V)$ が成り立つ。

(2) $k=2$ のとき、多重 Kähler 角度は Kähler 角度に他ならない。

(3) $\theta(V)=(0,\ldots,0)$ となるための必要十分条件は、V 内に複素 $[k/2]$ 次元部分ベクトル空間が存在することである。k が偶数である場合、$\theta(V)=(0,\ldots,0)$ となるための必要十分条件は、V 自身が複素部分ベクトル空間になることである。

(4) $\theta(V)=(\pi/2,\ldots,\pi/2)$ となるための必要十分条件は、V と $\sqrt{-1}V$ が直交することである。

(5) $k=1$ の場合は、1 次元ベクトル空間上の交代 2 次形式は 0 のみだから、任意の実 1 次元部分ベクトル空間 V に対して $\theta(V)=\pi/2$ が成り立つ。他方、$U(n)$ は $\mathbf{C}^n$ 内の単位ベクトル全体に推移的にする。すなわち、これらの立場では実 1 次元部分ベクトル空間は全部同じものと見ていることになる。同様に実超平面も全部同じものと見ていることになる。

$\mathbf{C}^n$ 内の実 k 次元部分ベクトル空間全体の成す実 Grassmann 多様体を第 1 節と同様に $G_k(\mathbf{C}^n)$ で表す。

命題 3.5 (T.[10]) $k\leq n$ とする。$0\leq\theta_1\leq\cdots\leq\theta_{[k/2]}\leq\pi/2$ を満たす $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_{[k/2]})$ に対して、

$$G^n_{k;\theta}=\{V\in G_k(\mathbf{C}^n)\mid\theta(V)=(\theta_1,\ldots,\theta_{[k/2]})\}$$

とおく。$U(n)$ の作用は実部分ベクトル空間の多重 Kähler 角度を不変にするので、$U(n)$ は $G^n_{k;\theta}$ に作用することはすでにわかっている。実はこの $U(n)$ の $G^n_{k;\theta}$ への作用は推移的である。さらに

$$V^k_\theta=\sum_{i=1}^{[k/2]}\operatorname{span}_{\mathbf{R}}\{\mathbf{e}_{2i-1},\cos\theta_i\sqrt{-1}\mathbf{e}_{2i-1}+\sin\theta_i\mathbf{e}_{2i}\}\quad(+\mathbf{R}\mathbf{e}_k),$$

とおくと (最後の項は k が奇数の場合のみ加える)、$G^n_{k;\theta}=U(n)\cdot V^k_\theta$ が成り立つ。

$n<k\leq 2n-1$ のときは

$$V^k_\theta=(V^{2n-k}_\theta)^\perp$$

とおく。命題3.5より $U(n)$ は

$$G^n_{k;\theta}=\{V\in G_k(\mathbf{C}^n)\mid\theta(V)=(\theta_1,\ldots,\theta_{[k/2]})\}$$

に推移的に作用する。すなわち $G^n_{k;\theta}=U(n)\cdot V^k_\theta$ が成り立つ。

定義 3.1 では交代 2 次形式の標準形という線形代数の概念を使って多重 Kähler 角度を定義した。ここでは等長変換群の観点から多重 Kähler 角度の幾何学的意味

について説明する。$\mathbf{C}^n$ 内の実 k 次元部分ベクトル空間全体の成す実 Grassmann 多様体は

$$G_k(\mathbf{C}^n) = O(2n)/O(k) \times O(2n-k)$$

と等質空間として表現できる。よく知られているようにこれはコンパクト対称空間である。多重 Kähler 角度を考える際に問題になったのは、$U(n)$ の $G_k(\mathbf{C}^n)$ への自然な作用である。$O(2n)/U(n)$ もコンパクト対称空間になることから、$U(n)$ の $G_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n)$ への作用は Hermann 作用と呼ばれる作用になっている。一般にコンパクト Lie 群 G に対して、(G, K_1) と (G, K_2) が対称対になるとき、K_2 のコンパクト対称空間 G/K_1 への自然な作用を **Hermann 作用**と呼ぶ。上の例では

$$G = O(2n), \quad K_1 = O(k) \times O(2n-k), \quad K_2 = U(n)$$

となっている。Hermann[1] の結果より、Hermann 作用は平坦な断面を持つ。一般に Riemann 多様体の等長変換群の任意の軌道に交わり直交する部分多様体を**断面**と呼ぶ。断面は全測地的部分多様体になることが知られている。例えば、実対称行列への直交群の作用を n 次対称行列 X と $g \in O(n)$ に対して gXg^{-1} によって定めると、対角行列全体はこの作用の断面になる。これは対称行列が直交行列で対角化できるということよりも少し詳しい情報を含んでいる。命題 3.5 で述べた V_θ^k から $U(n)$ の実 Grassmann 多様体 $G_k(\mathbf{C}^n)$ への作用に関する平坦な断面が自然に定まることがわかる。

命題 3.6 (T.[10]) $G_k(\mathbf{C}^n)$ の部分集合 $\{V_\theta^k \mid \theta \in \mathbf{R}^{[k/2]}\}$ は、$U(n)$ の $G_k(\mathbf{C}^n)$ への作用に関する平坦な断面である。

注意 3.7 多重 Kähler 角度は実 Grassmann 多様体 $G_k(\mathbf{C}^n)$ 上の関数とみなすことができ、$U(n)$ の作用に関して不変になっている。したがって、多重 Kähler 角度の値は $U(n)$ の作用に関する断面での値で決定される。多重 Kähler 角度 $(\theta_1, \ldots, \theta_{[k/2]})$ を命題 3.6 で述べた断面に制限すると、平坦トーラスの標準的な座標系になっている。

多重 Kähler 角度の定義は $\mathbf{C}^n$ のユニタリ構造にのみ依存しているので、概 Hermite 多様体の実部分多様体の接ベクトル空間の多重 Kähler 角度を考えることができる。この多重 Kähler 角度を使って複素射影空間内の一般の実部分多様体に関する Poincaré の公式を次のように定式化することができる。

定理 3.8 (T.[10]) $p \leq 2n \leq p+q$ と $q \leq 2n \leq p+q$ を満たす自然数 p と q に対して

$$\begin{aligned}
\sigma_{p,q}^n(\theta^{(p)}, \theta^{(q)}) &= \int_{U(1)\times U(n)} \sigma(V_{\theta^{(p)}}^{2n-p}, k^{-1} \cdot V_{\theta^{(q)}}^{2n-q}) d\mu_{U(1)\times U(n)}(k) \\
& \quad (\theta^{(p)} \in \mathbf{R}^{[\min\{p,2n-p\}/2]},\ \theta^{(q)} \in \mathbf{R}^{[\min\{q,2n-q\}/2]})
\end{aligned}$$

によって$\sigma^n_{p,q}$を定める。pまたはqが1または$2n-1$に等しいときは、どの実1次元または実$2n-1$次元部分ベクトル空間を使っても$\sigma^n_{p,q}$は同じ定数に定まる。このとき、$\mathbf{C}P^n$内の任意の実p次元部分多様体Mと任意の実q次元部分多様体Nに対して、次の等式が成り立つ。

$$\int_{U(n+1)} \mathrm{vol}(M \cap gN) d\mu_{U(n+1)}(g) = \int_{M\times N} \sigma^n_{p,q}(\theta(T_xM), \theta(T_yN)) d\mu_{M\times N}(x,y).$$

定理3.8において二つの部分多様体MとNが$\dim M + \dim N = 2n$を満たすとき、Poincaréの公式は次に述べるようにより詳しく記述できる。

定理 3.9 (T.[12]) $1 \leq p \leq n$を満たす自然数pに対して、多項式

$$P^n_p(x_1, \ldots, x_{[p/2]}, y_1, \ldots, y_{[p/2]})$$

が存在し、次の条件を満たす。

(1) 多項式$P^n_p(x_i, y_j)$の次数は各x_iとy_jに関して高々1である。

(2) $\{1, \ldots, [p/2]\}$の任意の置換αについて、次の等式が成り立つ。

$$P^n_p(x_i, y_j) = P^n_p(x_{\alpha(i)}, y_j) = P^n_p(x_i, y_{\alpha(j)}) = P^n_p(y_j, x_i).$$

(3) $\mathbf{C}P^n$内の任意の実p次元部分多様体Mと任意の実$(2n-p)$次元部分多様体Nに対して、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\int_{U(n+1)} \#(M \cap gN) d\mu_{U(n+1)}(g)\\ =& \int_{M\times N} P^n_p(\cos^2\theta_i(T_xM), \cos^2\theta_j(T_yN)) d\mu_{M\times N}(x,y).\end{aligned}$$

Howard[2](p.21) より

$$P^n_1 = \frac{2\mathrm{vol}(U(1))\mathrm{vol}(U(n))\mathrm{vol}(S^{2n})}{\mathrm{vol}(S^1)\mathrm{vol}(S^{2n-1})}$$

が成り立ち、特にP^n_1は定数である。これは$U(n)$が$\mathbf{C}^n$の単位ベクトル全体に推移的に作用することからわかる。また、定理2.2の結果は次のように述べることができる。

$$\begin{aligned}&P^n_2(x,y)\\ =& \frac{\mathrm{vol}(U(n+1))}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^1)\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^{n-1})} \frac{1}{4(n-1)} \cdot [(2n-1) - (x+y) + (2n-1)xy].\end{aligned}$$

多項式P^3_1とP^3_2は上で述べたように具体的な形が得られているが、さらにP^3_3の具体的な形を与えることができた。これで$\mathbf{C}P^3$における次元の和が全体の次元に一致する部分多様体の組に対するPoincaréの公式はすべて得られたことになる。

定理 3.10 (T.[12]) 次の等式が成り立つ。

$$P_3^3(x,y) = \frac{\mathrm{vol}(U(4))}{\mathrm{vol}(\mathbf{R}P^3)^2}\left(4 - \frac{4}{3}(x+y) + \frac{20}{9}xy\right).$$

Kang は P_4^4 の部分的な表現を与えた。

定理 3.11 (Kang[3]) 次の等式が成り立つ。

$$P_4^4(x_1, x_2, 1, 1) = \frac{\mathrm{vol}(U(5))}{\mathrm{vol}(\mathbf{C}P^2)^2}\cdot\frac{1}{8}\cdot(3 + x_1 + x_2 + 3x_1x_2).$$

現時点では複素射影空間内の部分多様体に対する Poincaré の公式の具体的な表示がわかっているのはここまでである。定理 3.9 の多項式は p が一般の場合にはどうなるかわかっていない。さらに、部分多様体の次元の和が全体の次元を越える場合には、Poincaré の公式の具体的な表示はわかっていない。つまり定理 3.8 の $\sigma_{p,q}^n(\theta^{(p)}, \theta^{(q)})$ の具体的表示はまだよくわかっていない。これらは今後の課題であり、現在模索中である。

4. 他の空間

複素空間形以外のいくつかの Riemann 等質空間に対しても、Poincaré の公式の具体的表示が得られているが、ここでは主に等質概 Hermitian 多様体内の概複素部分多様体に関する Poincaré の公式について述べる。

定理 4.1 (Kang-Sakai-Takahashi-T.[4]) G/K を複素 n 次元等質概 Hermitian 多様体とする。G はユニモジュラー Lie 群であり, K は p 次外積代数 $\wedge_p T_o^{(1,0)}(G/K)$ に既約に作用していると仮定する。このとき G/K 内の任意の複素 p 次元概複素部分多様体 M と任意の概複素部分多様体 N であって $\dim M + \dim N = \dim(G/K)$ を満たすものに対して、次の等式が成り立つ。

$$\int_G \#(M \cap gN)d\mu(g) = \frac{\mathrm{vol}(K)}{\binom{n}{p}}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N).$$

G/K が既約 Hermite 対称空間の場合には、酒井がこの定理の拡張を最近得た。

定理 4.2 (Sakai[7]) G/K を複素 n 次元既約 Hermite 対称空間とする。M, N を G/K の複素部分多様体であって、

$$\mathrm{codim}_{\mathbf{C}} M = p, \quad \mathrm{codim}_{\mathbf{C}} N = q, \quad p + q \le n$$

を満たしているとする。K が $\wedge_p T_o^{(1,0)}(G/K)$ または $\wedge_q T_o^{(1,0)}(G/K)$ に既約に作用しているならば、次の等式が成り立つ。

$$\int_G \mathrm{vol}(M \cap gN)d\mu(g) = \frac{(n-p)!(n-q)!\mathrm{vol}(K)}{n!(n-p-q)!}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N).$$

定理の仮定を満たす空間は次のようになっている。

	compact type	
$A\ III$	$SU(l)/S(U(m) \times U(l-m))$	any p (if $m = 1$) $p = 1$ (if $m \neq 1$)
$D\ III$	$SO(2l)/U(l)$	$p = 1, 2$
$BD\ I$	$SO(2l)/SO(2) \times SO(2l-2)$ $SO(2l+1)/SO(2) \times SO(2l-1)$	$p \neq l-1$ any p
$C\ I$	$Sp(l)/U(l)$	$p = 1, 2$
$E\ III$	$(\mathfrak{e}_{6(-78)}, \mathfrak{so}(10) + \mathbf{R})$	$p = 1, 2, 3$
$E\ VII$	$(\mathfrak{e}_{7(-133)}, \mathfrak{e}_6 + \mathbf{R})$	$p = 1, 2, 3, 4$

特に Santaló の結果 (定理 1.3) は $A\ III$ の $m = 1$ の場合になりすべての p について仮定を満たすので、定理 4.2 に含まれる。

参考文献

[1] R. Hermann, Variational completeness for compact symmetric spaces, Proc. Amer. Math. Soc., vol.11 (1960), 544–546.

[2] R. Howard, The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces, Mem. Amer. Math. Soc., No.509, vol.106 (1993).

[3] H. Kang, Integral geometry in the four dimensional complex projective space, preprint, 2001.

[4] H. Kang, T. Sakai, M. Takahashi and H. Tasaki, Poincaré formulas of complex submanifolds, preprint, 2002.

[5] H. Kang and H. Tasaki, Integral geometry of real surfaces in complex projective spaces, Tsukuba J. Math., vol.25, no.1 (2001), 155–164.

[6] H. Kang and H. Tasaki, Integral geometry of real surfaces in the complex projective plane, Geom. Dedicata, vol.90 (2002), 99–106.

[7] T. Sakai, Poincaré formula in irreducible Hermitian symmetric spaces, preprint, 2002.

[8] Isabel M.C. Salavessa, On the Kaehler angles of submanifolds, preprint (math.DG/0204349).

[9] L. A. Santaló, Integral geometry in Hermitian spaces, Amer. J. Math., vol.74 (1952), 423–434.

[10] H. Tasaki, Generalization of Kähler angle and integral geometry in complex projective spaces, in Steps in Differential Geometry, Proceedings of Colloquium on Differential Geometry, Debrecen, 2000 (edited by L. Kozma, P. T. Nagy and L. Tamássy), Published by the Institute of Mathematics and Informatics, University of Debrecen, 2001, pp.349–361. Available electronically at: `http://www.emis.de/proceedings/CDGD2000/`

[11] H. Tasaki, Integral geometry of submanifolds of real dimension two and codimension two in complex projective spaces, to appear in Proceedings of MSJ-IRI 2000.

[12] H. Tasaki, Generalization of Kähler angle and integral geometry in complex projective spaces II, preprint, 2001.

[13] 田崎博之, 等質空間の部分多様体の積分幾何学, 数学, 第 54 巻, 第 3 号, 2002 年 7 月, 280–291.